Prednáška 14

V tomto oddiely uvedieme niekoľko dôležitých viet, ktoré prevádzajú integrál cez množinu na integrál cez jej hranicu. Pripomeňme, že v teórii diferenciálnych foriem všetky tieto vety sú špeciálnym prípadom všeobecnej Stokesovej vety.

14.1. Integrálne vety

V prvej z týchto viet budeme integrovať cez otvorenú ohraničenú množinu, ktorej hranica je zovšeobecnená varieta. Z predchádzajúcich odstavcov plynie, že v každom bode niektorej komponenty tejto hranice existuje jednotkový normálový vektor . Také vektory sú dva a líšia sa od seba znamienkom.

Definícia 14.1.1.

Nech $A \subset R^n$. Jednotkový normálový vektor $\mathbf{N}^+$ k ∂A v bode $\mathbf{x}_0 \in \partial A$ nazveme vonkajším, ak existuje $\epsilon > 0$ tak, že body $\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{N}$ leží v $\mathbb{R}^n \setminus A$ pre $t \in (0, \epsilon)$ a v A pre $t \in (-\epsilon, 0)$. Vektor $\mathbf{N}^- = -\mathbf{N}^+$ potom nazveme vnútorným.

Problém 14.1.2.

Skúste nájsť teleso v $\mathbb{R}^3$, ktorého hranica bude obsahovať body s normálovým vektorom, ktorý však nebude ani vonkajší ani vnútorný.

Veta 14.1.3 (Gaussova-Ostrogradského)**.**

Nech A je otvorená ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$ a jej hranica je zovšeobecnená varieta (dimenzie $n-1$) taká, že $S_{n-1}(\partial A) < \infty$ a v každom bode x každej jej $(n-1)$-dimenzionálnej komponenty existuje vonkajší jednotkový vektor $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ k ∂A. Nech ďalej funkcia $F \in C(\overline{A})$ a pre nejaké $i \in \{1, \ldots, n\}$ má pre každé $\mathbf{x} \in A$ deriváciu $F'_{x_i} \in C(A)$, ktorá sa dá spojito predĺžiť na $\overline{A}$. Potom platí

$$\int_A \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \oint_{\partial A} F\, N_i \,\mathrm{d}S .$$

Z fyzikálneho hľadiska vyjadruje Gaussova veta (jej divergenčný tvar) skutočnosť, že tok vektora $\mathbf{T}$ uzavrenou plochou je rovný objemovému integrálu z jeho divergencie. Alebo inými slovami: tok cez hranicu množiny A je rovný súčtu žriediel a prepadov (zdrojov) v tejto množine.

Dôsledok 14.1.4 (O divergencii)**.**

Nech A spĺňa predpoklady vety 14.1.3 a pre každé $i = 1, 2, \ldots, r,\ \ T_i$ spĺňa predpoklady vety 14.1.3 kladené na funkciu F. Potom platí

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{T}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \oint_{\partial A} \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}\,\mathrm{d}S .$$

Príklad 14.1.5.

Chceme spočítať $I = \oint_{S^2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}\,\mathrm{d}S$, kde $\mathbf{T} = (2x, y^2, z^2)$. Priamy výpočet je dosť obtiažny a tak skúsime použiť predchádzajúcu vetu. Máme

$$I = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{T}\,\mathrm{d}(x,y,z) = 2\iiint_W (1 + y + z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

kde W je jednotková guľa. Nakoniec $I = 2\iiint_W \mathrm{d}(x,y,z) = 8\pi/3$, keďže integrály cez y, z sú nulové.

Dôsledok 14.1.6 (O integrácii per partes).

Nech A spĺňa predpoklady vety 14.1.3 a pre nejaké $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ funkcie U, V spĺňajú predpoklady vety 14.1.3 kladené na funkciu F. Potom platí

$$\int_A U \frac{\partial V}{\partial x_i} = -\int_A V \frac{\partial U}{\partial x_i} + \oint_{\partial A} U V N_i \, \mathrm{d}S .$$

Dôsledok 14.1.7 (Výpočet miery množiny cez jej hranicu).

Nech A spĺňa predpoklady vety 14.1.3, $\mathbf{T}$ spĺňa predpoklady vety o divergencii a $\operatorname{div} \mathbf{T} = 1$ na A. Potom platí

$$\lambda_r(A) = \int_{\partial A} \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}S .$$

Príklad 14.1.8.

Nech $K_R := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \|\mathbf{x}\|^2 < R^2, R > 0\}$. Potom $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Preto je

$$\lambda_n(K_R) = \frac{1}{n} \int_{\partial K_R} \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|} \, \mathrm{d}S = \frac{R}{n} \int_{\partial K_R} \mathrm{d}S = \frac{R}{r} S_{n-1}(\partial K_R).$$

Poznámka 14.1.9.

Divergencia vektorového poľa $\mathbf{F}$ v bode $\mathbf{x}_0$ môže byť definovaná aj ako limita podielu jeho toku cez hranicu oblasti (zvyčajne gule) obklopujúcej $\mathbf{x}_0$ (teda je to jej vnútorný bod) a objemu (miere) danej oblasti v zmysle scvrkávania sa.

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \lim_{O(\mathbf{x}_0) \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|O(\mathbf{x}_0)|} \oint_{\partial O(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}S .$$

Poznámka 14.1.10.

Rotácia vektorového poľa $\mathbf{F}$ v bode $\mathbf{x}_0$ môže byť definovaná aj pomocou projekcie. Ak $\mathbf{N}$ je jednotkový vektor, projekcia rotácie poľa $\mathbf{F}$ na $\mathbf{N}$ je definovaná ako limitná hodnota integrálu po uzavretej krivke v rovine kolmej na $\mathbf{N}$ podeleného mierou oblasti ktorú krivka uzatvára. Ak $\mathbf{x}_0 \in A = int\, C$, teda $\partial A = C$, potom

$$(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N} = \lim_{A(\mathbf{x}_0)\to \mathbf{x}_0} \left(\frac{1}{|A(\mathbf{x}_0)|} \oint_C \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} \right).$$

Vyššie uvedený vzťah znamená, že rotácia vektorového poľa je definovaná ako hustota infinitezimálnej oblasti cirkulácie tohto poľa.

Veta 14.1.11 (Jordanova)**.**

Nech ϕ je jednoduchá uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$ po častiach C^1, potom existujú súvislé otvorené množiny, $\operatorname{Int}\phi$ a $\operatorname{Ext}\phi$, s vlastnosťami:

1. $\operatorname{Int}\phi$ je ohraničená a $\operatorname{Ext}\phi$ je neohraničená
2. $\operatorname{Int}\phi \cup \operatorname{Ext}\phi \cup \phi = \mathbb{R}^2$
3. Hranica oboch množín je práve krivka ϕ

Pre takúto krivku sa dá ukázať, že iba v konečne veľa bodoch nemá množina $\operatorname{Int}\phi$ vonkajší normálový vektor. Nasledujúca veta je vlastne Gaussova veta pre množiny v $\mathbb{R}^2$, ktorá nám dáva vzťah medzi krivkovým integrálom po uzavretej jednoduchej krivke a dvojným integrálom cez množinu, ktorú táto krivka ohraničuje. Jej použitie je zrejmé a vieme pomocou nej vypočítať napr. obsah plochy (ale aj iné geometrické aplikácie) ohraničenej krivkou.

Veta 14.1.12 (Greenova)**.**

Nech ϕ je jednoduchá uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$ po častiach C^1, $A = \operatorname{Int}\phi$. Nech $\mathbf{T}$ je spojité na $\overline{A}$.

- Ak derivácie $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}, \frac{\partial T_2}{\partial x_2}$ sú spojito predĺžiteľné na $\overline{A}$ a $\tilde{\mathbf{T}} = (-T_2, T_1)$, tak

$$\int_A \operatorname{div}\mathbf{T}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \pm\int_\phi \tilde{\mathbf{T}}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

- Ak derivácie $\frac{\partial T_2}{\partial x_1}, \frac{\partial T_1}{\partial x_2}$ sú spojito predĺžiteľné na $\overline{A}$, potom

$$\int_A\left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1}-\frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\mathbf{x} = \pm\int_\phi \mathbf{T}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

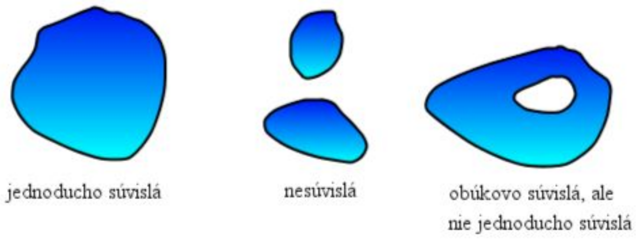
Planimetr (z lat. planum, rovina) je přístroj k měření obsahů rovinných ploch libovolného tvaru................

Stokesova veta v podstate dáva do súvislosti krivkový integrál vektorového poľa cez uzavretú krivku a plošný integrál z rotácie daného vektorového poľa cez plochu krivkou uzavretú (tok rotácie poľa cez danú plochu je rovný práci tohto poľa po okraji plochy). Z matematického hľadiska je zovšeobecnením Greenovej vety.

Veta 14.1.13 (Stokesova)**.**

Nech $M = \phi(D)$ je jednoduchá C^1 plocha v $\mathbb{R}^3$, kde D je súvislá. Nech $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ je jednoduchá, uzavretá a $\tilde{M} = \phi(\operatorname{Int}\psi)$, kde $\operatorname{Int}\psi \subset D$. ďalej nech $\mathbf{T}$ má spojité derivácie na okolí množiny $\tilde{M}\cup\psi$, kde $\psi = \phi\circ\psi$ (okraj plochy $\tilde{M}$). Potom platí

$$\int_{\tilde{M}} \operatorname{rot}\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S = \int_{\tilde{M}} \det\begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_1 & T_2 & T_3\end{pmatrix}\mathrm{d}S = \int_\psi \mathbf{T}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$



Obr. 14.1: Súvislosť množín.

Poznámka 14.1.14.

Vety Greenova a Stokesova platia za ešte všeobecnejších predpokladov ako sme formulovali a dokazovali.
Teraz is prepíšeme rovnicu v Greenovej vete vo vektorových formách ()

$$\oint_C \mathbf{T} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{int\ C} \mathrm{rot}\mathbf{T} \cdot \mathbf{k} \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\oint_C \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}s = \iint_{int\ C} \mathrm{div}\mathbf{T} \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

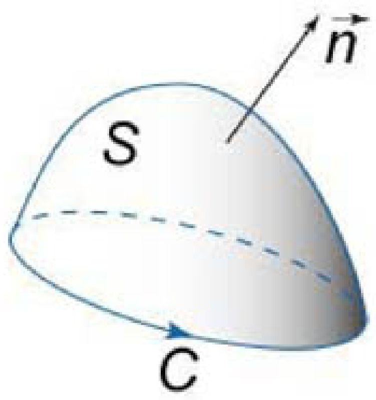
Ešte si ukážeme všeobecnejšie požiadavky na množinu tak, aby nutné podmienky potenciálnosti poľa boli aj postačujúcimi.

Definícia 14.1.15.

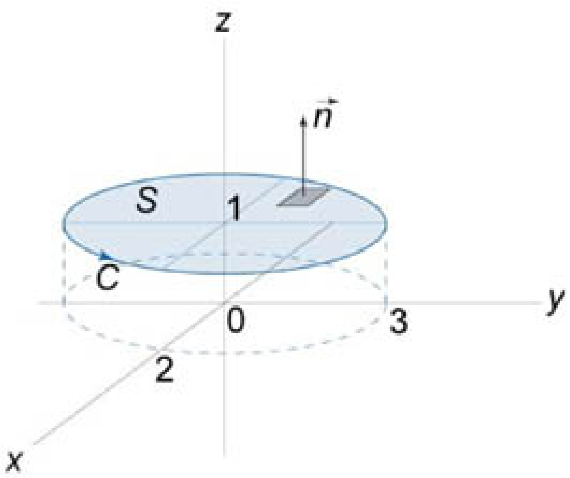
Otvorená množina $D \subset \mathbb{R}^2$ sa nazýva jednoducho súvislá, ak vnútro každej jednoduchej uzavretej krivky ležiacej v D tiež leží v D.

Lema 14.1.16.

Ak je $D \subset \mathbb{R}^2$ otvorená a ohraničená a $\mathbb{R}^2 \setminus D$ je súvislá, potom je D jednoducho súvislá.



(a) Integrál po uzavretej krivke C.



(b) Plošný integrál cez plochu S.

Obr. 14.2: Stokesova veta.

Veta 14.1.17 (Potenciálnosť poľa v $\mathbb{R}^2$).

Ak pole $\mathbf{T}$ má v jednoducho súvislej množine $D \subset \mathbb{R}^2$ spojité parciálne derivácie a

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = \frac{\partial T_2}{\partial x_1}$$

v D, potom má v D potenciál.

Veta 14.1.18 (Potenciálnosť poľa v $\mathbb{R}^3$).

Ak pole $\mathbf{T}$ má v otvorenej konvexnej množine $D \subset \mathbb{R}^3$ spojité parciálne derivácie a $\operatorname{rot} \mathbf{T} = 0$ v D, potom má v D potenciál.

Poznámka 14.1.19 (Reynoldsova transportná teoréma)**.**

Zovšeobecnením derivácie parametrického integrálu je táto formula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\Omega(t)} \phi(\mathbf{x},t)\mathrm{d}\mathbf{V}\right] = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t)\mathrm{d}\mathbf{V} + \int_{\partial\Omega(t)} \phi(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\mathbf{N}^{+}\,\mathrm{d}\mathbf{A},$$

kde $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ je rýchlosť plošného elementu a $\mathbf{N}^{+}$ je vonkajší jednotkový normálový vektor v bode $\mathbf{x}$ k $\Omega(t)$.

Návod na kreslenie kriviek

Pri zobrazovaní krivky K s parametrickým vyjadrením

$$x = \phi(t), \ y = \psi(t), \ t \in M,$$

kde množina M je zjednotením konečného počtu intervalov a funkcie ϕ, ψ sú spojité na M, postupujeme spravidla nasledovne:

- riešením rovníc $\phi(t) = 0, \ t \in M$, resp. $\psi(t) = 0, \ t \in M$, nájdeme priesečníky krivky K s osou O_y, resp. O_x;
- množinu M rozdelíme na intervaly $J_1, \ldots, J_n$ tak, aby na každom z nich boli funkcie ϕ a ψ rýdzo-monotónne (ak sú funkcie ϕ, ψ diferencovateľné, stačí teda vyšetriť ich rast a klesanie pomocou znamienka funkcií ϕ', ψ'); rovnicami $x = \phi(t), \ y = \psi(t), \ t \in J_i$, je tak parametricky daná rýdzo-monotónna spojitá funkcia $y = f_i(x), \ i = 1, \ldots, n$;
- nájdeme množiny $\phi(J_i), \ \psi(J_i), \ i = 1, \ldots, n$ (prvá z nich je zrejme definičným oborom a druhá oborom hodnôt funkcie f_i), na to stačí - pretože funkcie ϕ, ψ sú na J_i rýdzo-monotónne a spojité - nájsť funkčné hodnoty, resp. príslušné jednostranné limity funkcií ϕ, ψ v krajných bodoch intervalu J_i; v prípade, že niektorá z týchto limít je nevlastná, vyšetríme existenciu asymptoty krivky K;
- na základe znamienka druhej derivácie funkcie f_i (samozrejme pokiaľ táto derivácia existuje) vyšetríme konvexnosť a konkávnosť funkcie f_i;
- načrtneme grafy jednotlivých funkcií $f_i, \ i = 1, \ldots, n$, ktorých zjednotením je krivka K (pokiaľ pritom nie je zrejmé, či sa grafy dvoch funkcií f_i a f_j pretnú alebo nepretnú, vyšetríme, či existujú $u \neq v, \ u \in J_i, \ v \in J_j$ také, že $\phi(u) = \phi(v), \ \psi(u) = \psi(v)$; ak áno, pretínajú sa grafy funkcií f_i a f_j v bode $(\phi(u), \psi(u))$.

Zdroj daného textu je na stránke http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/kubacek/

Niektoré ortogonálne krivočiare súradnice

Krivočiaré súradnice (q_1, q_2, q_3)	**Transformácia**	**škálovacie faktory**
Sférické súradnice $(r, \phi, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$	$x = r \sin\phi \cos\theta$ $y = r \sin\phi \sin\theta$ $z = r \cos\phi$	$h_r = 1$ $h_\phi = r$ $h_\theta = r \sin\phi$
Cylindrické súradnice $(r, \theta, z) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi]) \times (-\infty, \infty)$	$x = r \cos\theta$ $y = r \sin\theta$ $z = z$	$h_r = h_z = 1$ $h_\theta = r$
Parabolické súradnice $(u, v, z) \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty) \times (-\infty, \infty)$	$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ $y = uv$ $z = z$	$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$ $h_z = 1$
Paraboloidálne súradnice $(u, v, \phi) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, 2\pi)$	$x = uv \cos\phi$ $y = uv \sin\phi$ $z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$	$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$ $h_\phi = uv$
Eliptické súradnice $(u, v, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$	$x = a \cosh u \cos v$ $y = a \sinh u \sin v$ $z = z$	$h_u = h_v = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$ $h_z = 1$

Pretiahnuté elipsoidálne súradnice $(\xi,\eta,\phi)\in[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$	$x = a\sinh\xi\sin\eta\cos\phi$ $y = a\sinh\xi\sin\eta\sin\phi$ $z = a\cosh\xi\cos\eta$	$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta}$ $h_\phi = a\sinh\xi\sin\eta$
Sploštené elipsoidálne súradnice $(\xi,\eta,\phi)\in[0,\infty)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi)$	$x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi$ $y = a\cosh\xi\cos\eta\sin\phi$ $z = a\sinh\xi\sin\eta$	$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta}$ $h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta$
Elipsoidálne súradnice $-\lambda<c^2<-\mu<b^2<-\nu<a^2$	$x^2 = \frac{\left(a^2+\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)\left(a^2+\nu\right)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$ $y^2 = \frac{\left(b^2+\lambda\right)\left(b^2+\mu\right)\left(b^2+\nu\right)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$ $z^2 = \frac{\left(c^2+\lambda\right)\left(c^2+\mu\right)\left(c^2+\nu\right)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}$	$h_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$ $h_\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}$ $h_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}}$
Bipolárne súradnice $(u,v,z)\in[0,2\pi)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$	$x = \frac{a\sinh v}{\cosh v-\cos u}$ $y = \frac{a\sin u}{\cosh v-\cos u}$ $z = z$	$h_u = h_v = \frac{a}{\cosh v-\cos u}$ $h_z = 1$
Toroidálne súradnice $(u,v,\phi)\in(-\pi,\pi]\times[0,\infty)\times[0,2\pi)$	$x = \frac{a\sinh v\cos\phi}{\cosh v-\cos u}$ $y = \frac{a\sinh v\sin\phi}{\cosh v-\cos u}$ $z = \frac{a\sin u}{\cosh v-\cos u}$	$h_u = h_v = \frac{a}{\cosh v-\cos u}$ $h_\phi = \frac{a\sinh v}{\cosh v-\cos u}$
Sféro-kuželové (kónické) súradnice $\nu^2<b^2<\mu^2<a^2,\ \lambda\in[0,\infty)$	$x = \frac{\lambda\mu\nu}{ab}$ $y = \frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{a^2-b^2}}$ $z = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{a^2-b^2}}$	$h_r = 1$ $h_\mu = r\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{(b^2-\mu^2)(\mu^2-c^2)}}$ $h_\nu = r\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}$

Sférické súradnice v $\mathbb{R}^n$ $r > 0,\ \phi_{n-1} \in (-\pi, \pi],\ \phi_i \in (0, \pi),\ i = 1, \dots, n-2$	$x_1 = r\cos\phi_1,$ $\vdots$ $x_j = r\cos\phi_j \prod_{i=1}^{j-1} \sin\phi_i,$ $\vdots$ $x_n = r\prod_{i=1}^{n-1} \sin\phi_i$	$h_r = r$ $h_{\phi_i} = r\prod_{i=1}^{j-1} \sin\phi_i$

Lebesgueov-Stieltjesov integrál

T. J. Stieltjes (1856–1894) zaviedol prirodzené zovšeobecnenie Riemannovho integrálu pre ohraničenú funkciu f pomocou váhovej (neklesajúcej) funkcie g ako limitu súm

$$\sum f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

kde, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je delenie príslušného intervalu ah $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Na existenciu integrálu na intervale $[a, b]$ stačí napr. aby f bola monotónna a g neklesajúca a spojitá, alebo f spojitá a g neklesajúca, alebo f spojitá a g má ohraničenú variáciu.

Nech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je **nezáporná** funkcia a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zasa monotónna a **sprava-spojitá**[1] Definujme $w((s, t]) = g(t) - g(s)$ a $w(s) = 0,\ s, t \in [a, b]$, potom existuje jediná miera λ_g na $[a, b]$, tzv. Lebesgueova–Stieltjesova miera asociovaná s g, pre ktorú $\lambda_g(I) = w(I)$ pre ľubovoľný interval. Tá vznikne rozšírením vonkajšej miery definovanej ako

$$\mu_g(E) = \inf \left\{ \sum_i \mu_g(I_i) \ :\ E \subset \bigcup_i I_i \right\},$$

kde I_i zľava otvorený interval.

Lema 14.1.20 (Hodnoty Lebesgueovej–Stieltjesovej miery)**.**

Ak $a < b$ tak

- $\lambda_g((a, b]) = g(b^+) - g(a^+) = g(b) - g(a)$
- $\lambda_g((a, b)) = g(b^-) - g(a^+) = g(b^-) - g(a)$
- $\lambda_g([a, b]) = g(b^+) - g(a^-) = g(b) - g(a^-)$
- $\lambda_g([a, b)) = g(b^-) - g(a^-)$
- $\lambda_g(\{a\})) = g(a^+) - g(a^-) = g(a) - g(a^-)$
- $\lambda_g((a, a)) = \lambda_g(\emptyset) = 0$

[1] Alebo aj f je merateľná, ohraničená a g sprava-spojitá, s ohraničenou variáciou.

Lebesgueov–Stieltjesov integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

je definovaný ako Lebesgueov integrál funkcie f vzhľadom na mieru λ_g, teda $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\lambda_g(x)$.

Veta 14.1.21.

Ak g je rastúca, potom

- pre $a_j \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_I \sum_{j=1}^n a_j f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \sum_{j=1}^n a_j \int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

  ak pravá strana existuje.

- pre po dvoch disjunktné intervaly a $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, platí

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

  ak aspoň 1 z integrálov existuje.

- Pre $g(x) = \sum_{j=1}^n c_j g_j(x), c_j \geq 0,\ g_j$ rastúce, platí

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \sum_{j=1}^n c_j \int_I f(x)\,\mathrm{d}g_j(x),$$

  ak pravá strana existuje.

- Ak $f \leq h$ na I, potom $\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) \leq \int_I h(x)\,\mathrm{d}g(x)$, ak sú integrály definované.
- Ak $f = h$ s.v. (v zmysle miery μ_g) na I, potom $\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_I h(x)\,\mathrm{d}g(x)$, ak aspoň 1 z integrálov existuje.

Veta 14.1.22.

- Ak g je rastúca a spojitá v a, potom, ak aspoň 1 z integrálov existuje platí

  a) $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$

  b) $\int_{[a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$

- Ak g je rastúca a spojitá v b, potom, ak aspoň 1 z integrálov existuje platí

  a) $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{[a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$

  b) $\int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$

- Pre každý interval I platí $\int_I 1\,\mathrm{d}g(x) = \lambda_g(I)$.
- Ak g je konštantná na otvorenom intervale I, potom $\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0$
- $\int_{[a,a]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{\{a\}} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(a)\,[g(a^+) - g(a^-)]$
- Ak g je diferencovateľná na otvorenom intervale I, potom

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_I f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

  ak aspoň 1 z integrálov existuje

Príklad 14.1.23.

Majme funkciu $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x+1, & x \geq 0, \end{cases}$ a funkciu $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Počítajme

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{[-1,0)} f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_{[0,0]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_{(0,1]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) =$$

$$= \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + f(0)(g(0^+) - g(0^-)) + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = -1/2 + 1(1-0) + 1/2 = 1.$$

Pseudo-Riemannovské metriky

Majeme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Tenzorové pole g_{kl} typu $(0,2)$ (dvakrát kovariantné) na Ω je priradenie $(x_1,\dots,x_n) \to \{g_{kl}(\mathbf{x})\}$, $k,l = 1,2,\dots,n$, $\mathbf{x} \in \Omega$ také, že platí

$$\tilde{g}_{ij}(\mathbf{y}) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}(\mathbf{x}) \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_j}.$$

Takéto pole je pseudo-Riemannova metrika[2] typu (p,q) ak platí, že (g_{kl}) je symetrická regulárna matica a v kanonickom tvare má na diagonálke $p-$krát 1 a $q-$krát -1.

Príklad 14.1.24 (Minkowského (Lorentzova) metrika)**.**

Minkowského priestor sa používa k popisu časo-priestoru v špeciálnej teórii relativity. V $\mathbb{R}^{n+1}$ možno definovať pseudo-metriku

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x_n)^2 - (\mathrm{d}\tau)^2.$$

Ak $G = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}_l$ je pseudo-Riemannova metrika Ω, potom definujeme funkciu $g(\mathbf{x}) := \det(g_{kl}(\mathbf{x}))$. Zrejme platí vzťah $\sqrt{|g|} = |\det J|\sqrt{|\tilde{g}|}$. Potom integrál 1. druhu z funkcie f cez Ω s danou metrikou G je

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}S := \int_\Omega f\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

a pre regulárnu plochu dimenzie k platí

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}S = \int_A f \circ \Phi\,\mathrm{d}\tilde{S},$$

kde $\Phi : A \to \Omega$ je jej parametrizácia a

$$\mathrm{d}\tilde{S} = \sum_{i,j}^{k} (g_{kl} \circ \Phi) \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi_l}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_i\,\mathrm{d}y_j.$$

[2] V každom bode nedegenerované, teda jediný vektor kolmý na všetko je nulový - matica je invertovateľná.